Die mit (L) gekennzeichneten Aufgaben sind für
alle Studierende, also auch für Lehramt-Studierende, geeignet.

Lokale Extrema

Lokale Extrema ohne Nebenbedingungen

1. **(L)** Bestimme alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + e^{2y} - 8y$$

2. **(L)** Finde alle stationären Punkte der Funktion und entscheide, ob es sich dabei um lokale Extrema handelt!

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x(x - 2)\sin(y)$$

3. Finde alle kritischen Punkte der Funktion und entscheide, ob es sich dabei um lokale Extrema handelt!

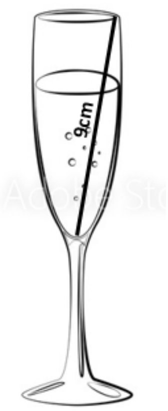
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x, y) = \mathrm{Re}\left(\cos(x + iy)\right)$$

Lokale Extrema mit Nebenbedingungen

4. **(L)** Bestimme alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = (x - y + z)^2$ auf der Oberfläche der Kugel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

5. **(L)** Wie lauten die Minima und Maxima der Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

6. **(L)** Die Form eines Sektglases kann durch eine Parabel $f(x) = ax^2$ beschrieben werden. Wie hoch muss das Sektglas sein, damit das Volumen maximal wird unter der Bedingung, dass der Abstand von Scheitelpunkt zum Glasrand $9cm$ beträgt?



Implizite Funktionen und Untermannigfaltigkeiten

Implizite Funktionen

1. (L)

(a) Zeige, dass sich die Gleichung $x+y+z=\sin(xyz)$ in einer Umgebung V von $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ nach z auflösen lässt. (D.h. es ex. eine Umgebung $U(0,0)$ und eine Funktion u so, dass $x, y, u(x,y) =: z$ (mit $(x,y) \in U$)die obige Gleichung lösen)

(b) Berechne $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)$.

2. (L) Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x+y+z &= 0 \\ xz + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

lokal bei $(0,1,-1)$ nach (y,z) auflösbar ist. Bestimme $Dg(0)$ für eine solche Auflösung $g(x)=(y,z)$!

3. (L)

(a) Zeige, dass $F(x,y) := x^5 + y^4 - 4xy - 11x + 2 = 0$ in einer Umgebung von $(1,2)$ eine Auflösung nach x besitzt $(x = g(y))$.

(b) Berechne $g'(2)$!

(c) Berechne eine Näherung von $g(2,03)$!

Untermannigfaltigkeiten

4. Sei $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2z^2 = 0,\ x + y + z - 1 = 0\}$.

(a) Zeige, dass M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist!

(b) Berechne $T_{(1,1,-1)}M$!

(c) Berechne $N_{(1,1,-1)}M$!

5. Es sei 0 ein regulärer Wert der Funktion $f \in C^1((0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. M sei als eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ durch $M := f^{-1}(\{0\})$ defininiert.

(a) Zeige, dass $R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0\}$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. (Das ist die Rotationsfläche von M um die y-Achse)

(b) Welche geometrische Figur wird durch die Rotation von $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-R)^2 + y^2 = r^2\}$ mit $R > r > 0$ beschrieben? Ist der Rotationskörper eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$?

Noch eine Aufgabe zum Thema Ableiten

6. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to f(x,y)$. Durch $f(x,y) = 0$ sei eine implizite Funktion gegeben. Die erste Ableitung der Auflösung nach y ist $g'(x) = -\dfrac{\partial_x f(x,g(x))}{\partial_y f(x,g(x))}$. Zeige, dass gilt:

$$g''(x) = -\frac{(\partial_y f)^2\ \partial_x^2 f - 2\partial_y f\ \partial_{xy}^2 f\ \partial_x f + \partial_y^2 f\ (\partial_x f)^2}{(\partial_y f)^3}$$

6. Mathe Nacht

Integralrechnung

1. **(L)** Berechne folgende Integrale und hab Spaß dabei!

a) $$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)dx$$

b) $$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+1}dx$$

c) $$\int_1^e (6x^2-2)ln(x)dx$$

d) $$\int_1^\infty \frac{kx+k}{x^3}dx$$

e)* $$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}^3}$$

f)* $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+cos^2(x)}{1+cos(2x)}dx$$

(Tipp zu f*: beachte die Identität $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.)

Kurvenintegral 2.Art

2. Ein Massepunkt im Koordinatenursprung $(0,0,0)$ erzeugt ein Gravitationsfeld, das bis auf einen konstanten Faktor gegeben ist durch $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$G(x) := -\frac{x}{\|x\|_2^3}$$

Wird ein zweiter Massepunkt der Masse 1 längs der Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ bewegt, so ist die an ihm geleistete Arbeit das Kurvenintegral 2.Art von G über γ. Berechne die geleistete Arbeit in Abhängigkeit von γ und argumentiere, warum diese wegunabhängig ist.
Was passiert im Falle einer geschlossenen Kurve?

Metrische Räume

1. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?
Beweise oder widerlege!

- **a)** **(L)** Die Vereinigung beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- **b)** **(L)** $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann offen und abgeschlossen zugleich, wenn $\partial A = \emptyset$ gilt.

Sei (M, d) im Folgenden ein metrischer Raum.

- **c)** Sei $M \neq \emptyset$. Dann sind alle endlichen Teilmengen von M kompakt.
- **d)** Sei $X \subseteq M$ kompakt. Dann ist auch jede beschränkte Teilmenge von X kompakt.
- **e)** Jede Cauchyfolge aus M konvergiert in M.

2. Gegeben sei die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

- **a)** **(L)** Gib ∂M, $\mathring{M}$ und $\overline{M}$ an.
- **b)** **(L)** Ist M offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt?
- **c)** **(L)** Ist O eine offene Menge mit $O \subset M$, so ist $O = \emptyset$.

3. Für nichtleere Mengen A und B im $\mathbb{R}^n$ (versehen mit der euklidischen Metrik) sei

$$A + B := \{z \in \mathbb{R}^n : \text{ Es existieren } \ x \in A, y \in B \text{ mit } z = x + y\}$$

Zeige: Ist A offen und B beliebig, so ist $A + B$ offen.

6. Mathe Nacht

Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Taylor

1. **(L)** Wahr oder Falsch? Eine im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist im Punkt x_0 auch stetig. Beweise deine Antwort!

2. Führe eine Taylorentwicklung von $f(x, y) = e^x \sin(y)$ um den Nullpunkt bis zum zweiten Glied (einschließlich) durch!

   (L) Abwandlung für Lehrämter: Führe eine Taylorentwicklung von $f(x) = e^x \sin(x)$ um den Nullpunkt bis zum zweiten Glied (einschließlich) durch!

3. **(L)** Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   (a) Zeige, dass die Funktion auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist!

   (b) Berechne $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ an allen Stellen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, an denen diese partielle Ableitung existiert!

4. **(L)** Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x, y) = |xy|$$

   In welchen Punkten ist f differenzierbar und in welchen Punkten ist f partiell differenzierbar?

5. **(L)** Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Zeige, dass die partiellen Ableitungen für jede Kugel $B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ unbeschränkt sind!

6.* Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimme alle $v \in \mathbb{R}^2$ mit $||v|| = 1$ derart, dass die Richtungsableitung von f im Nullpunkt in Richtung v existiert!